رایانش کوانتومی
معماری

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

معماری

دارا بودن مقدمات ریاضیاتی و فیزیکی، امکان ذکر جزییات رایانش کوانتومی

دل رایانه بیت و دل رایانه کوانتومی تعمیم آن با نام کیوبیت

تعبیری متفاوت و جدید از گیت‌های منطقی کلاسیکی کار با بیت‌ها

- جهت ساده‌سازی تدوین مفهوم گیت‌های کوانتومی کار با کیوبیت‌ها

امکان معکوس‌پذیری تطور سیستم‌های کوانتومی

- ترجمان تحت گیت‌های معکوس‌پذیر

گیت‌ها کوانتومی

بیت‌ها و کیوبیت‌ها

تعریف بیت

- واحدی از اطلاعات است که سیستم‌های کلاسیک دو بعدی را توصیف می‌کند.

مثال‌هایی از بیت

- وجود یا عدم وجود الکتریسیته متحرک در مدار (یا جریان بالا و پائین)
- روشی جهت نمایش صادق یا کاذب
- کلیدی که خاموش یا روشن می‌شود

بیت‌ها و کیوبیت‌ها

تعداد حالت‌ها در تمامی مثال‌های بالا برابر دو و نمایش معمول آنها با 0 یا ۱

- امکان نمایش صفر با ماتریس دو مقداری $|0\rangle = \begin{bmatrix} ۱ \\ 0 \end{bmatrix}$ و یک با $|۱\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \end{bmatrix}$
- به دلیل دو نمای متفاوت و متعامد بیت‌های درست و حسابی در اختیار است
- بیت یا صفر است یا یک
  - وجود جریان در مدار یا غیر آن
  - درستی یا نادرستی گزاره‌ای
  - روشنی یا خاموشی کلیدی
- عدم کفایت روشنی یا خاموش در کوانتوم
  - سیستم‌هایی با بودن همزمان در دو حالت خاموش و روشن
  - امکان بودن سیستم کوانتومی همزمان در صفر و یک

بیت‌ها و کیوبیت‌ها

تعریف کیوبیت:

- واحد اطلاعاتی است که سیستم‌های کوانتومی دو بعدی را توصیف می‌کند.

نمایش با $\begin{bmatrix} c_0 \\ c_۱ \end{bmatrix}$ به طوری که $|c_0|^۲ + |c_۱|^۲ = ۱$

پس بیت کلاسیک حالت خاصی از کیوبیت

تفسیر $|c_0|^۲$ به احتمال صفر شدن مقدار کیوبیت بعد اندازه‌گیری

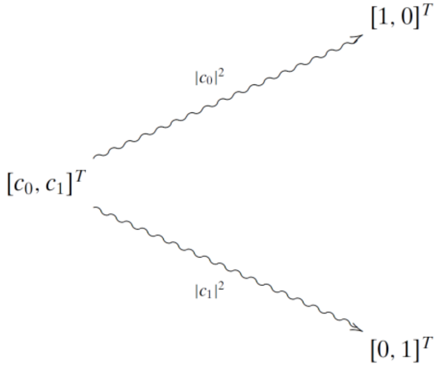
تفسیر $|c_۱|^۲$ به احتمال یک شدن مقدار کیوبیت بعد اندازه‌گیری

با اندازه‌گیری کیوبیت، تبدل خودکار آن به بیت

- عدم امکان رویت کیوبیت در حالت کلی
- وجود آنها علی‌رغم عدم رویت و اعضای اصلی سیر رایانش کوانتومی

بیت‌ها و کیوبیت‌ها

امکان نمایش رمبش کیوبیت به بیت



راحتی مشاهدهٔ $|0\rangle$ و $|۱\rangle$ به مشابه‌پایه‌های کانونی $\mathbb{C}^۲$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_۱ \end{bmatrix} = c_0 \begin{bmatrix} ۱ \\ 0 \end{bmatrix} + c_۱ \begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \end{bmatrix} = c_0|0\rangle + c_۱|۱\rangle$$

بیت‌ها و کیوبیت‌ها

مثال

$$V = \begin{bmatrix} 5+3i \\ 6i \end{bmatrix}$$

$$|V| = \sqrt{\langle V, V\rangle} = \sqrt{[5-3i, -6i]\begin{bmatrix} 5+3i \\ 6i \end{bmatrix}} = \sqrt{34+36} = \sqrt{70}.$$

$$\frac{V}{\sqrt{70}} = \begin{bmatrix} \frac{5+3i}{\sqrt{70}} \\ \frac{6i}{\sqrt{70}} \end{bmatrix} = \frac{5+3i}{\sqrt{70}}|0\rangle + \frac{6i}{\sqrt{70}}|1\rangle.$$

بیت‌ها و کیوبیت‌ها

چگونگی امکان پیاده‌سازی کیوبیت‌ها

- امکان بودن الکترون در یکی از دو اربیت متفاوت اطراف هستهٔ اتم (حالت زمینه و حالت انگیخته)
- امکان بودن فوتون در یکی از دو حالت قطبی‌شده
- امکان بودن ذره زیراتمی در یکی از دو جهت اسپین

بیت‌ها و کیوبیت‌ها

عدم جالب توجه بودن رایانه‌های با تک‌بیت، به طریق مشابه عدم کفایت رایانه‌های کوانتومی با تک کیوبیت

نیاز به ابزارهای کوانتومی بیشتر از یک کیوبیت

بایت یا هشت بیتی

- 01101011
- نمایش با
  - $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
- امکان استفاده از ضرب تنسوری
  - $|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$

بیت‌ها و کیوبیت‌ها

در قالب کیوبیتی

- $\mathbb{C}^۲ \otimes \mathbb{C}^۲ \otimes \mathbb{C}^۲ \otimes \mathbb{C}^۲ \otimes \mathbb{C}^۲ \otimes \mathbb{C}^۲ \otimes \mathbb{C}^۲ \otimes \mathbb{C}^۲$

$$(\mathbb{C}^۲)^{\otimes ۸}$$

- فضای بردار مختلط از بعد $۲۵۶ = ۲^۸$

به دلیل وجود دقیقا یک فضای بردار مختلط از چنین بعدی

- ایزومورفی با $\mathbb{C}^{۲۵۶}$

امکان نمایش بایت در روش دیگر

- به صورت بردار ردیفی $۲۵۶ = ۲^۸$

بیت‌ها و کیوبیت‌ها

امکان نمایش بایت در روش دیگر

- به صورت بردار ردیفی ۲۵۶ = ۲^۸

- $$\begin{array}{c} 00000000 \\ 00000001 \\ \vdots \\ 01101010 \\ 01101011 \\ 01101100 \\ \vdots \\ 11111110 \\ 11111111 \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بیت‌ها و کیوبیت‌ها

امکان نمایش بایت در روش دیگر

- به صورت بردار ردیفی $۲۵۶ = ۲^۸$

- $$\begin{array}{c} 00000000 \\ 00000001 \\ \vdots \\ 01101010 \\ 01101011 \\ 01101100 \\ \vdots \\ 11111110 \\ 11111111 \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مورد قبل مناسب جهان کلاسیک؛ اما در جهان کوانتومی جهت امکان برهم‌نهی نیاز به تعمیم

- هر حالت سیستم هشت-کیوبیتی به مثابهٔ

- $$\begin{array}{c} 00000000 \\ 00000001 \\ \vdots \\ 01101010 \\ 01101011 \\ 01101100 \\ \vdots \\ 11111110 \\ 11111111 \end{array} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_۱ \\ \vdots \\ c_{۱۰۶} \\ c_{۱۰۷} \\ c_{۱۰۸} \\ \vdots \\ c_{۲۵۴} \\ c_{۲۵۵} \end{bmatrix}$$

- به طوری‌که $\sum_{i=0}^{۲۵۵} |c_i|^۲ = ۱$
- ملقب به کیوبایت

بیت‌ها و کیوبیت‌ها

در دنیای کلاسیک ضرورت نمایش حالت هر بیت بایت

- نیاز به نوشتن هشت بیت

در دنیای کوانتوم حالت هشت کیوبیتی با نوشتن ۲۵۶ عدد مختلط

رشد نمایی مزبور یکی از دلایل توجه محققان به مفهوم رایانش کوانتومی

در صورت قصد تقلید از رایانه کوانتومی با رجیستر ۶۴ بیتی

- نیاز به ذخیرهٔ ۱۸,۴۴۶,۷۴۴,۰۷۳,۷۰۹,۵۵۱,۶۱۶ = $۲^{۶۴}$ عدد مختلط
- خارج از گزینه‌های موجود حافظه

بیت‌ها و کیوبیت‌ها

امکان نمایش جفت کیوبیت به صورت

- $|1\rangle \otimes |0\rangle$ یا $|0 \otimes 1\rangle$

به معنای کیوبیت نخست در حالت $|0\rangle$ و کیوبیت دوم در حالت $|1\rangle$

- یا با نمایش دیگر
- $\begin{array}{c} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

بیت‌ها و کیوبیت‌ها

- مثال- کیوبیت متناظر با $\frac{۱}{\sqrt{۳}}\begin{bmatrix} ۱ \\ 0 \\ -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$
$= \frac{۱}{\sqrt{۳}}|00\rangle - \frac{۱}{\sqrt{۳}}|10\rangle + \frac{۱}{\sqrt{۳}}|11\rangle = \frac{|00\rangle - |10\rangle + |11\rangle}{\sqrt{۳}}$

پس امکان نوشتن حالت کلی سیستم دو کیوبیتی به صورت
$|\psi\rangle = c_{0,0}|00\rangle + c_{0,1}|01\rangle + c_{1,0}|10\rangle + c_{1,1}|11\rangle$

عدم امکان جابجاپذیری ضرب تنسوری دو حالت
$|0 \otimes ۱\rangle = |0\rangle \otimes |۱\rangle = |0,1\rangle = |01\rangle \neq |10\rangle = |1,0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = |1 \otimes 0\rangle$

گیت‌های کلاسیک

جهت کار با بیت‌ها

- ورود و خروج بیت‌ها به گیت‌ها

طریق نمایش

نمایش ورودی **n** بیتی با ماتریس ۱×۲^n و خروجی **m** بیتی با ماتریس ۱×۲^m

نمایش گیت منطقی با ماتریس $۲^n \times ۲^m$

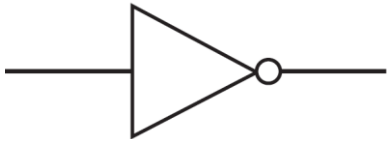
ضرب ماتریس عملیات در ورودی

- $(۲^m \times ۲^n)(۲^n \times ۱) = ۲^m \times ۱$

سخن کوتاه، نمایش بیت‌ها با بردارهای ستونی و نمایش عملیات‌های منطقی با ماتریس

گیت‌های کلاسیک

گیت نقیض **not**



دریافت تک بیت ورودی با ماتریس دو در یک و خروجی تک بیتی با دو در یک.

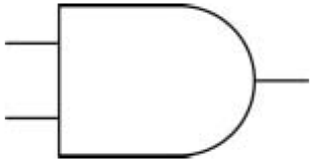
نقیض $|0\rangle$ برابر با $|١\rangle$ و نقیض $|١\rangle$ برابر با $|0\rangle$ است.

ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & ١ \\ ١ & 0 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 0 & ١ \\ ١ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ١ \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & ١ \\ ١ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ 0 \end{bmatrix}$

گیت‌های کلاسیک

گیت وصل



متفاوت از گیت نقیض؟

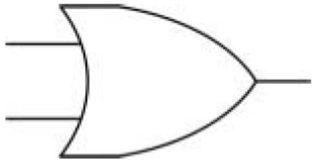
دریافت دو بیت و خروجی تک‌بیت

نیاز به ماتریس $۲^۱$ در $۲^۲$

ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $\& = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ یا $\&|11\rangle = |1\rangle$
- $\& = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ یا $\&|01\rangle = |0\rangle$
- مثال؟ $\&|10\rangle = |?\rangle$

گیت‌های کلاسیک

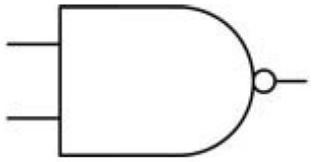


گیت یا

ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} ۱ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} ۱ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ۱ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} ۱ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} ۱ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ 0 \end{bmatrix}$

گیت‌های کلاسیک



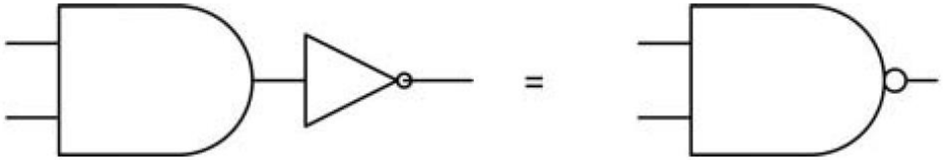
گیت نقیض وصل

ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

گیت‌های کلاسیک

امکان نمایش به صورت دیگر



$$\neg * \& = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

گیت نقیض یا

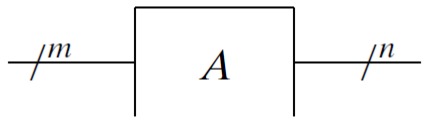
$$\neg * | = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چنین شیوهٔ اندیشیدن به مدار نقض وصل و نقیض یا منجر به وضعیتی عمومی

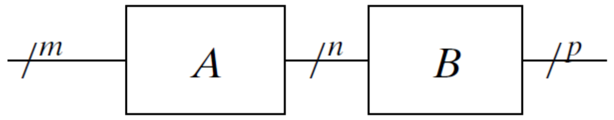
گیت‌های کلاسیک

شیوه نمایش

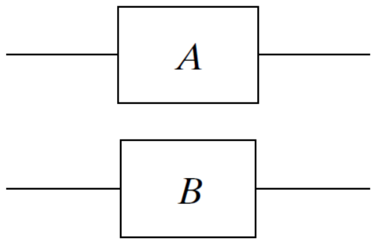
- ماتریس دارای اندازه $۲^n \times ۲^m$



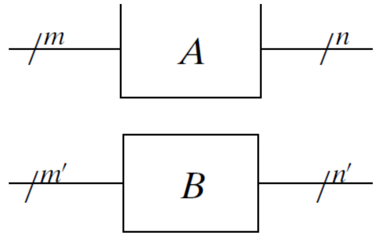
- «طبق قرارداد»، B دریافت n بیت از A و تحویل p بیت
  - B*A متناظر $(۲^p \times ۲^n)(۲^n \times ۲^m) = ۲^p \times ۱$



گیت‌های کلاسیک

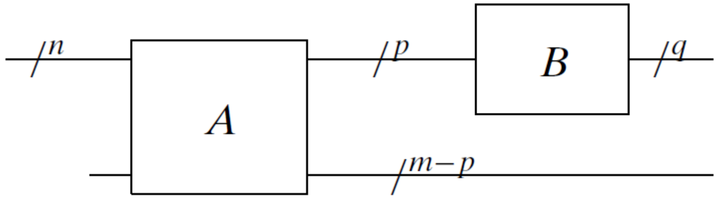


- عملیات موازی
  - A روی قسمتی از بیت‌ها و B نیز روی سمت دیگری از بیت‌ها کار می‌کند.
  - نمایش با $A \otimes B$
  - نمایش با تعداد دقیق ورودی‌ها و خروجی‌ها



- A دارای اندازهٔ $۲^{n} \times ۲^{m}$ و B دارای اندازهٔ $۲^{n'} \times ۲^{m'}$
- $A \otimes B$ دارای اندازهٔ $۲^{n}۲^{n'} = ۲^{n+n'}$ در $۲^{m}۲^{m'} = ۲^{m+m'}$
- ترکیب عملیات‌های متوالی و موازی را مدارات خوانیم.
- امکان ایجاد مدارات بسیار پیچیده اما همگی تجزیه‌پذیر به گیت‌های مرکب از اجزای متوالی و موازی

گیت‌های کلاسیک



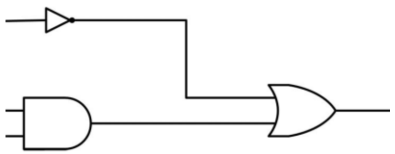
A ماتریس $2^n \times 2^m$

B ماتریس $2^p \times 2^q$

I ماتریس $2^{m-p} \times 2^{m-p}$

- در کل
- $(B \otimes I_{m-p})A$

گیت‌های کلاسیک

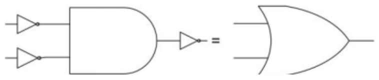


مثال- طرح $(|*(\neg \otimes \&))$

$$\neg \otimes \& = \begin{bmatrix} 0 & ١ \\ ١ & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ١ & ١ & ١ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ١ \\ ١ & ١ & ١ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ١ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$| * (\neg \otimes \&) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ١ & ١ & ١ & 0 \\ ١ & ١ & ١ & 0 & 0 & 0 & 0 & ١ \end{bmatrix}$$

گیت‌های کلاسیک



قاعده دمورگان بر اساس ماتریس‌ها

$$\neg(\neg P \wedge \neg Q) = P \vee Q$$

طبق ماتریس‌ها: $| = (\neg \otimes \neg) * \& * \neg$

گیت‌های کلاسیک

ماتریس متناظر

$$\mathrm{NOT} \otimes \mathrm{NOT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

گیت‌های معکوس‌پذیر

عدم کاربرد تمامی گیت‌های معرفی شده در قسمت قبلی در رایانه‌های کوانتومی

معکوس‌پذیر بودن تمامی عملیات‌های کوانتومی اندازه‌گیری‌نشدۀ

نمایش با ماتریس‌های یگانی

معکوس‌ناپذیری گیت وصل

- خروجی $|0\rangle$ مشخص نبودن ورودی و امکان هر یک از موارد $|00\rangle$ و $|01\rangle$ و $|10\rangle$

وجود گیت‌های معکوس‌پذیر پیش از رایانش کوانتومی

مصرف بالای انرژی و تولید گرمای فراوان سیستم‌های رایانشی فعلی

گیت‌های معکوس‌پذیر

لانداوه در سال ۱۳۳۹
- بررسی فرایندهای رایانشی
- نتیجه‌گیری: پاک‌سازی اطلاع موجب مصرف انرژی و گرما
- معروف به اصل لانداوه Landauer’s principle

سخن کوتاه پاک‌سازی عملیاتی معکوس‌ناپذیر و انرژی‌سوز

چارلز بنت در دهه ۴۰ شمسی
- با فرض پاک‌سازی اطلاعات تنها عملیات انرژی‌بر
- آن‌گاه عدم مصرف انرژی در رایانهٔ معکوس‌پذیر و بدون پاک‌سازی
- آغاز کار روی مدارات و برنامه‌های معکوس‌پذیر

از مثال‌های مدارات معکوس‌پذیر: گیت نقیض
- معکوس‌پذیری گیت نقیض
- هر گیت نقیض معکوس خود

$$\neg * \neg = I_۲$$

گیت‌های کوانتومی

تعریف: گیت کوانتومی عملگری است که روی کیوبیت‌ها عمل می‌کند.

نمایش چنین عملگرهایی با ماتریس‌های یگانی

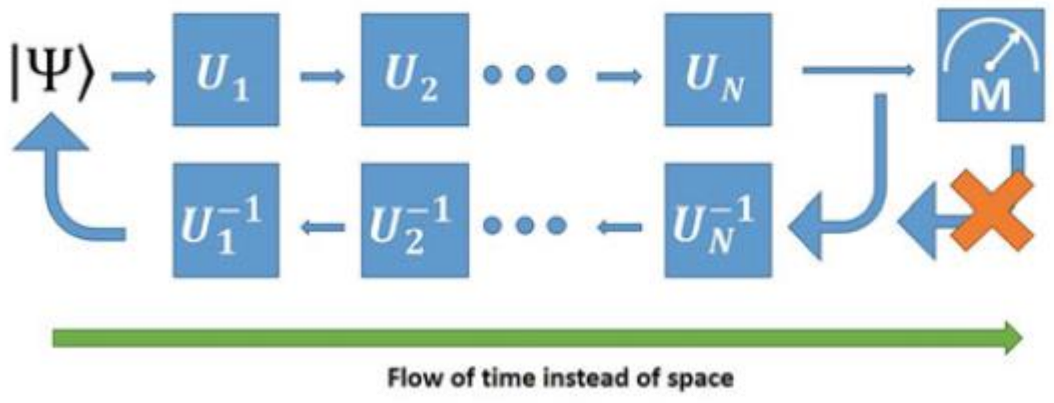
چند گیت کوانتومی:

- عملگر همانی I
- گیت نقیض
- گیت نقیض کنترل‌شده
- گیت توفولی
- گیت فردکین
- گیت هدامرد

گیت‌های کوانتومی- خواص

رایانش کوانتومی

- مجموعه‌ای از چرخش‌ها بردارهای بزرگ در فضای برداری بزرگ
- فضا برداری بزرگ حاصل از ضرب تنسوری فضاهای با ابعاد کوچکتر
- کوچکترین فضای برداری فضای هیلبرت $\mathbb{C}^{۲}$ جهت کار با بردارهای کیوبیتی
- بردار ۱۶ بعدی در فضای $\mathbb{C}^{۱۶}$ با گروه‌بندی اسپین چهار الکترون با یکدیگر
- اندازه‌گیری پس از چرخش در بین اعمال عملیات‌ها



گیت‌های کوانتومی- خواص

ضرورت اعمال چرخش‌های بامعنی

- در جهت دستیابی به نتیجه مطلوب

همچنین ضرورت یگانی بودن ماتریس U

- $U^{-1} = U^{\dagger}$
- خاصیت یگانی بودن
  - معکوس‌پذیری: مورد نیاز برای گیت کوانتومی
    - اجبار مکانیک کوانتوم بر عدم امکان از بین رفتن اطلاع در سیستم کوانتومی
    - پس امکان معکوس‌پذیری هر عملیات جهت حفظ یکپارچگی اطلاع
  - حفظ خاصیت ضرب داخلی بردارهای: موردنیاز در قوانین فیزیک
  - خاصیت چرخش حافظ و وارن‌پذیر
- سخن کوتاه، هر قدم یگانی و وارون‌پذیر
  - به جز اندازه‌گیری

گیت‌های کوانتومی- خواص

گیت کوانتومی

- اجرای عملیات یگانی

رایانه کلاسیک

- جریان سیگنال الکتریکی در چند گیت فیزیکی (نقیض وصل در چهار ترانزیستور) در فضا

رایانه کوانتومی

- عدم جریان کیوبیت و جریانش در فضا
- در عوض اعمال عملیاتی مانند ریزموج یا پالس لیزری جهت تغییر کیوبیت
- معمولا نمایش جریان زمان

گیت کوانتومی و ارتباط با فیزیک

اعمال پالس خارجی به کیوبیت فیزیکی به معنای فیزیکی بودن
- در نتیجه ایجاد سیستمی که کیوبیت طبق آن تطور می‌یابد.

تغییر حالت در فیزیکی وابسته به انرژی کل سیستم
- انرژی کل معروف به همیلتنی
  - در این درس فرض بر کل انرژی مثلا جمع انرژی پتانسیل و جنبشی
  - معادله شرودینگر حاکم بر تطور سیستم
    - متناظر قوانین نیوتن در مکانیک کلاسیک

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle$$

    - $\hbar$ ثابت کاهیدهٔ پلانک
    - H همیلتنی
    - $|\psi\rangle$ بردار حالت سیستم
- سمت چپ: سرعت تغییر حالت سیستم
- سمت راست: سرعت تغییر حالت بر اساس ضرب همیلتنی در حالت
- مانند F=ma

گیت کوانتومی و ارتباط با فیزیک

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle$$

- اهمیت معنای علائم
  - $|\psi\rangle$ برداری با امکان نمایش ستونی
  - H عملگر و در نتیجه ماتریس
- پاسخ آن

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|\psi(0)\rangle$$

- $|\psi(t)\rangle$و$|\psi(0)\rangle$ بردار و $e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$ ماتریس

گیت کوانتومی و ارتباط با فیزیک

- جانشینی

$$i\hbar \frac{\partial e^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\Psi(0)\rangle}{\partial t} = He^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\Psi(0)\rangle$$

$$i\hbar \frac{-iH}{\hbar} e^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\Psi(0)\rangle = He^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\Psi(0)\rangle$$

$$He^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\Psi(0)\rangle = He^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\Psi(0)\rangle$$

- نمایشگر برآورده کردن معادله بدست آمده در معادله شرودینگر
- پس $e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$ بیانی عمومی از گیت کوانتومی
  - نامیدن U

گیت کوانتومی و ارتباط با فیزیک

- بررسی یگانی بودن U
- نیاز به بررسی H
  - عملگر مربوط به انرژی
  - در نتیجه هرمیتی
    - چرا؟ به دلیل مشاهدپذیری انرژی
    - پس $H = H^{\dagger}$

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\dagger} \\
= \; & e^{\frac{-i\boldsymbol{H}t}{\hbar}} \left(e^{\frac{-i\boldsymbol{H}t}{\hbar}}\right)^{\dagger} \\
= \; & e^{\frac{-i\boldsymbol{H}t}{\hbar}} e^{\frac{i\boldsymbol{H}^{\dagger}t}{\hbar}} \\
= \; & e^{\frac{-i\boldsymbol{H}t}{\hbar}} e^{\frac{i\boldsymbol{H}t}{\hbar}} \\
= \; & \boldsymbol{I}
\end{aligned}
$$

- سخن کوتاه، کوانتوم گیت عملگری فیزیکی است و ذاتا یگانی

گیت نقیض NOT(X)

$U_\neg$ یا X

$$U_\neg|0\rangle = |1\rangle$$
$$U_\neg|1\rangle = |0\rangle$$

ماتریس آن

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- نمایش $|0\rangle$ با $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ پس

$$U_\neg|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$$
$$U_\neg|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

گیت نقیض NOT(X)

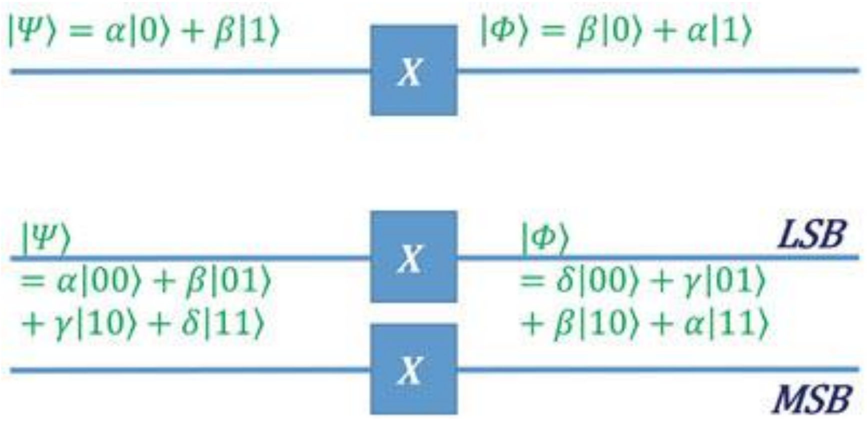
خواص

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|۱\rangle$$

$$U_\neg|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & ۱ \\ ۱ & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \beta|0\rangle + \alpha|۱\rangle$$

در فضای $\mathbb{C}^۴$ که اصل ضرب تنسوری دو فضای $\mathbb{C}^۲$

$$U_{\neg ۲} = U_\neg U_\neg = \begin{bmatrix} 0 & ۱ \\ ۱ & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & ۱ \\ ۱ & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ۱ \\ 0 & 0 & ۱ & 0 \\ 0 & ۱ & 0 & 0 \\ ۱ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



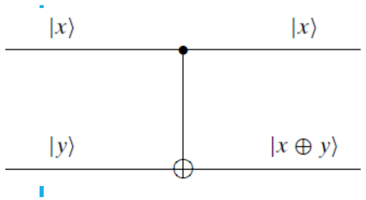
گیت نقیض NOT(X)

خواص

$$U_{\neg ٢}|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ١ \\ 0 & 0 & ١ & 0 \\ 0 & ١ & 0 & 0 \\ ١ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$|\Psi\rangle = (a_0|0\rangle + b_0|1\rangle) \otimes (a_1|0\rangle + b_1|1\rangle)$$

$$\alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$$



گیت نقیض کنترل شده CNOT(XOR)

گیت XOR منطقی دارای دو ورودی و تک خروجی

$U_{\oplus}$ دو ورودی و دو خروجی

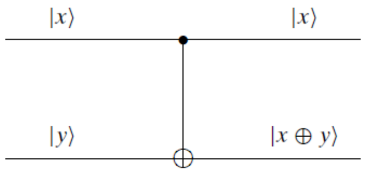
بیت بالایی بیت کنترلی: کنترل مقدار خروجی

اگر $|x\rangle = 0$ آنگاه خروجی پایین برابر $|y\rangle$

اگر $|x\rangle =$ ۱ آنگاه خروجی پایین نقیض

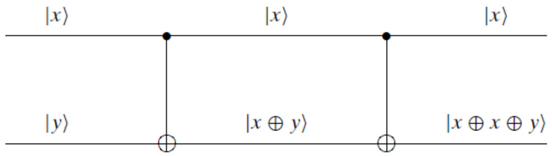
پس انتقال $|x,y\rangle$ به $|x,x \oplus y\rangle$

$$U_{\oplus}|x,y\rangle = |x,x \oplus y\rangle$$



گیت نقیض کنترل شده CNOT(XOR)

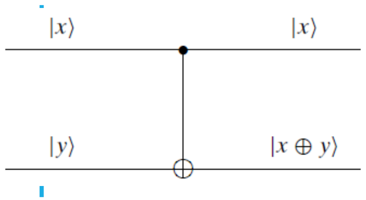
امکان معکوس‌سازی گیت نقیض-کنترل‌شده با خودش



انتقال $|x,y\rangle$ به $|x,x \oplus y\rangle$ و انتقال مورد اخیر به $|x,x \oplus x \oplus y\rangle$

- $x \oplus x = 0$
- پس برگشت به حالت اصلی $|x,y\rangle$

گیت نقیض کنترل‌شده معکوس خود

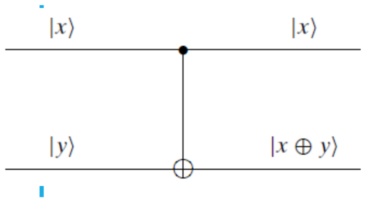


گیت نقیض کنترل شده CNOT(XOR)

$|x,x \oplus y\rangle$

$$U_{\oplus}|00\rangle = |0,0 \oplus 0\rangle = |00\rangle$$
$$U_{\oplus}|0١\rangle = |0,0 \oplus ١\rangle = |0١\rangle$$
$$U_{\oplus}|١0\rangle = |١,١ \oplus 0\rangle = |١١\rangle$$
$$U_{\oplus}|١١\rangle = |١,١ \oplus ١\rangle = |١0\rangle$$

صرفا تغییر موارد سوم و چهارم (جابجایی آنها)

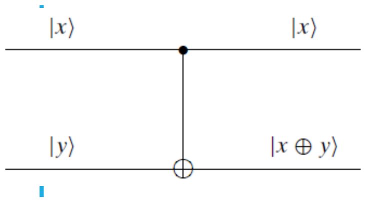


گیت نقیض کنترل شده CNOT(XOR)

$$U_{\oplus}|x, y\rangle = |x, x \oplus y\rangle$$

ماتریس متناظر آن

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array} \\ \begin{array}{c} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



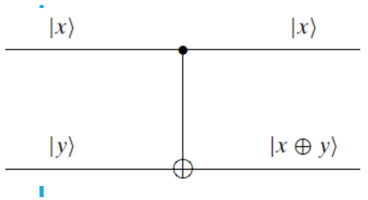
گیت نقیض کنترل شده CNOT(XOR)

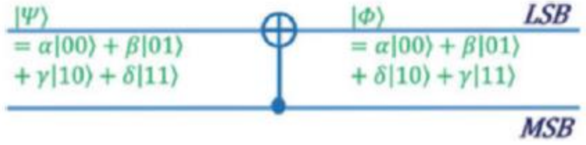
$$U_{\oplus}|x, y\rangle = |x, x \oplus y\rangle$$

ماتریس متناظر آن

$$U_{\oplus}|۱0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ۱ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ۱ \end{bmatrix} = |۱۱\rangle$$

گیت نقیض کنترل شده CNOT(XOR)





$$U_{\oplus}|x, y\rangle = |x, x \oplus y\rangle$$

ماتریس متناظر آن

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|0\text{۱}\rangle + \gamma|\text{۱}0\rangle + \delta|\text{۱۱}\rangle$$

$$U_{\oplus}|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha|00\rangle + \beta|0\text{۱}\rangle + \delta|\text{۱}0\rangle + \gamma|\text{۱۱}\rangle$$

گیت جابجا SWAP

گیت swap منطقی دارای دو ورودی و تک خروجی

$U_{\leftrightarrow}$ دو ورودی و دو خروجی

$$U_{\leftrightarrow}|\mathrm{xy}\rangle = |yx\rangle$$

پس

$$U_{\leftrightarrow}|00\rangle = |00\rangle$$
$$U_{\leftrightarrow}|0۱\rangle = |۱0\rangle$$
$$U_{\leftrightarrow}|۱0\rangle = |0۱\rangle$$
$$U_{\leftrightarrow}|۱۱\rangle = |۱۱\rangle$$

صرفا تغییر موارد دوم و سوم (جابجایی آنها)

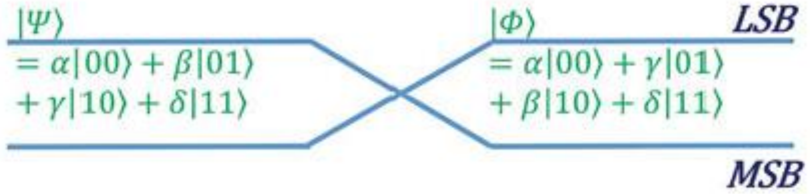
گیت جابجا SWAP

$$U_{\leftrightarrow}|x,y\rangle = |yx\rangle$$

ماتریس متناظر آن

$$U_{\leftrightarrow} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گیت جابجا SWAP



ماتریس متناظر آن

$$U_{\leftrightarrow}|١0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ١ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ١ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = |0١\rangle$$

گیت جابجا SWAP

$$U_{\leftrightarrow}|x, y\rangle = |yx\rangle$$

ماتریس متناظر آن

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|0۱\rangle + \gamma|۱0\rangle + \delta|۱۱\rangle$$

$$U_{\leftrightarrow}|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \\ \beta \\ \delta \end{bmatrix} = \alpha|00\rangle + \gamma|0۱\rangle + \beta|۱0\rangle + \delta|۱۱\rangle$$

جهت اعمال مذکور نیاز به پالسی خارجی و تغییردهنده اسپین‌های دو الکترون

گیت انتقال فاز

گیت تک ورودی تک خروجی

انتقال فاز بین دو بردار پایه

به صورت

- $U_\phi|0\rangle = |0\rangle$
- $U_\phi|۱\rangle = e^{i\phi}|۱\rangle$

ϕ فاز و $e^{i\phi}$ ضریب فاز

- عدم تاثیر در حین اعمال به بردار صفر
- افزودن فاز با اعمال به بردار یک
  - دلیل؟

گیت انتقال فاز

گیت تک ورودی تک خروجی

انتاقل فاز بین دو بردار پایه

به صورت

- $U_\phi|0\rangle = |0\rangle$
- $U_\phi|۱\rangle = e^{i\phi}|۱\rangle$

ϕ فاز و $e^{i\phi}$ ضریب فاز

- عدم تاثیر در حین اعمال به بردار صفر
- افزودن فاز با اعمال به بردار یک
  - دلیل؟

گیت انتقال فاز

ماتریس متناظر آن

$$U_\phi = \begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$$

- اعمال ماتریس

$$U_\phi|۱\rangle = \begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\phi} \end{bmatrix} = e^{i\phi}\begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \end{bmatrix} = e^{i\phi}|۱\rangle$$

- اعمال بر بردار دلخواه $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|۱\rangle$

$$U_\phi|\psi\rangle = \begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ e^{i\phi}\beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + e^{i\phi}\beta|۱\rangle$$

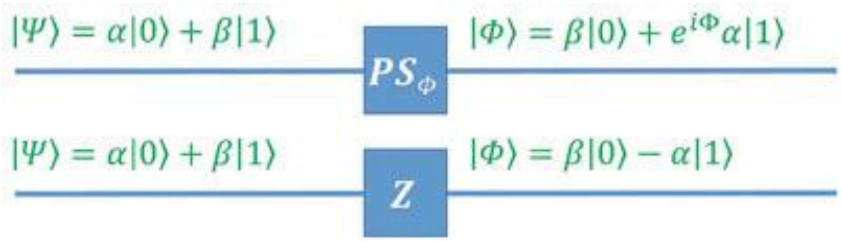
گیت انتقال فاز

دو ضریب $\alpha = e^{i\theta_1}|\alpha|$ و $\beta = e^{i\theta_2}|\beta|$

که اختلاف فاز آنها $\theta_1 - \theta_2$

با تغییر فاز

- عدم تغییر فاز α و تغییر فاز β به $\theta_2 + \phi$
- روشنگر دلیل افزودن فاز صرفا به بردار یک
- در صورت افزودن به هر دو بی‌تاثیر روی تغییر فاز



گیت انتقال فاز

اگر $\phi = \pi$

$$U_\pi = \begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & -۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس σ_Z از ماتریس‌های پائولی

- معروف به گیت Z
- پس گیت Z تغییر فاز دهنده به اندازه π
- کار در پایه $|+\rangle/|-\rangle$ به مثابهٔ گیت نقیض
- گیت نقیض
  - در بردار پایه $|0\rangle/|۱\rangle$ تغییر صفر به یک و برعکس
  - در بردار پایه $|+\rangle/|-\rangle$ تغییر مثبت به منفی و برعکس
- آزمایش گیت Z

$$U_\pi|+\rangle = \mathrm{U_Z}|+\rangle = \mathrm{U_Z}\frac{۱}{\sqrt{۲}}(|0\rangle + |۱\rangle) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|0\rangle - |۱\rangle) = |-\rangle$$

گیت انتقال فاز کنترل شده

گیت انتقال فاز کار در پایه $|+\rangle/|-\rangle$ به مثابهٔ گیت نقیض

- امکان داشتن همزاد کنترل‌شده در پایهٔ مذکور

گیت دو ورودی دو خروجی

$$U_{C\phi}|xy\rangle = e^{i(xy)\phi}|xy\rangle$$

xy به معنای and منطقی

$$U_{C\phi}|00\rangle = e^{i(0.0)\phi}|00\rangle = |00\rangle$$
$$U_{C\phi}|0۱\rangle = e^{i(۱.0)\phi}|۱0\rangle = |۱0\rangle$$
$$U_{C\phi}|۱0\rangle = e^{i(0.۱)\phi}|0۱\rangle = |0۱\rangle$$
$$U_{C\phi}|۱۱\rangle = e^{i(۱.۱)\phi}|۱۱\rangle = e^{i\phi}|۱۱\rangle$$

گیت انتقال فاز کنترل شده

$$U_{C\phi}|xy\rangle = e^{i(xy)\phi}|xy\rangle$$

ماتریس متناظر آن

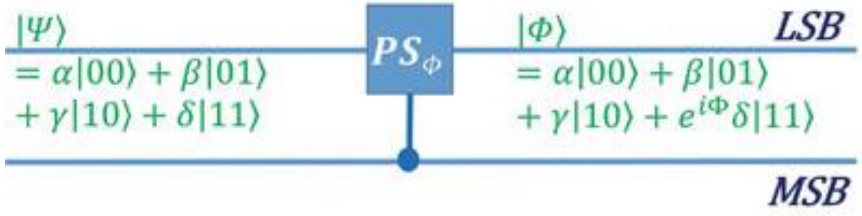
$$U_{C\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$$

گیت انتقال فاز کنترل شده

ماتریس متناظر آن

$$U_{C\phi}|۱۱\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{i\phi} \end{bmatrix} = e^{i\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ۱ \end{bmatrix} = e^{i\phi}|۱۱\rangle$$

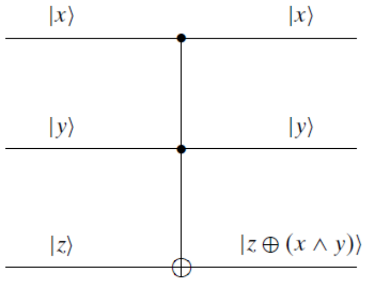
گیت انتقال فاز کنترل شده



$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|0\text{۱}\rangle + \gamma|\text{۱}0\rangle + \delta|\text{۱۱}\rangle$$

$$U_{C\phi}|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ e^{i\phi}\delta \end{bmatrix} = \alpha|00\rangle + \gamma|0\text{۱}\rangle + \beta|\text{۱}0\rangle + e^{i\phi}\delta|\text{۱۱}\rangle$$

گیت توفولی TOFFOLI (نقیض دوکنترلی CCNOT)

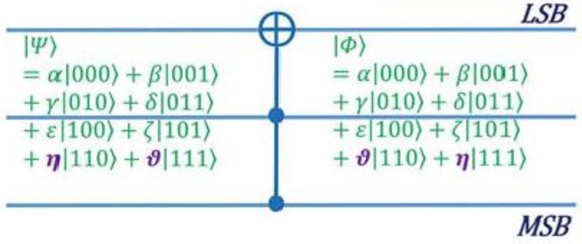


شبیه مدار نقیض کنترل‌شده اما با دو بیت کنترلی

تغییر بیت پایینی در صورتی که هر دو بیت بالایی در حالت $|1\rangle$ باشند.

پس انتقال $|x,y,z\rangle$ به $|x,y,z \oplus (x \wedge y)\rangle$

گیت توفولی معکوس خود



گیت توفولی TOFFOLI (نقیض دوکنترلی CCNOT)

مثال

$$\boldsymbol{T}\,|0,0,0\rangle = |0,0,(0\cdot 0)\oplus 0\rangle = |0,0,0\rangle$$

$$\boldsymbol{T}\,|0,0,1\rangle = |0,0,(0\cdot 0)\oplus 1\rangle = |0,0,1\rangle$$

$$\boldsymbol{T}\,|0,1,0\rangle = |0,1,(0\cdot 1)\oplus 0\rangle = |0,1,0\rangle$$

$$\boldsymbol{T}\,|0,1,1\rangle = |0,1,(0\cdot 1)\oplus 1\rangle = |0,1,1\rangle$$

$$\boldsymbol{T}\,|1,0,0\rangle = |1,0,(1\cdot 0)\oplus 0\rangle = |1,0,0\rangle$$

$$\boldsymbol{T}\,|1,0,1\rangle = |1,0,(1\cdot 0)\oplus 1\rangle = |1,0,1\rangle$$

$$\boldsymbol{T}\,|1,1,0\rangle = |1,1,(1\cdot 1)\oplus 0\rangle = |1,1,1\rangle$$

$$\boldsymbol{T}\,|1,1,1\rangle = |1,1,(1\cdot 1)\oplus 1\rangle = |1,1,0\rangle$$

گیت توفولی TOFFOLI (نقیض دوکنترلی CCNOT)

ماتریس متناظر آن

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \end{array} \\
\begin{array}{c} 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

گیت توفولی TOFFOLI (نقیض دوکنترلی CCNOT)

مثال

$$T\,|111\rangle = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = |110\rangle$$

گیت توفولی TOFFOLI (نقیض دوکنترلی CCNOT)

$$|\psi\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|00۱\rangle + \gamma|0۱0\rangle + \delta|0۱۱\rangle + \varepsilon|۱00\rangle + \zeta|۱0۱\rangle + \eta|۱۱0\rangle + \theta|۱۱۱\rangle$$

$$T|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \\ \zeta \\ \eta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \\ \zeta \\ \theta \\ \eta \end{bmatrix}$$

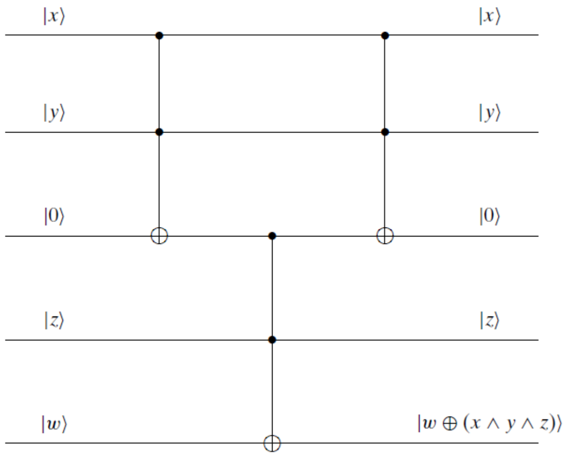
$$= \alpha|000\rangle + \beta|00۱\rangle + \gamma|0۱0\rangle + \delta|0۱۱\rangle + \varepsilon|۱00\rangle + \zeta|۱0۱\rangle + \theta|۱۱0\rangle + \eta|۱۱۱\rangle$$

$$= \alpha|0\rangle + \beta|۱\rangle + \gamma|۲\rangle + \delta|۳\rangle + \varepsilon|۴\rangle + \zeta|۵\rangle + \theta|۶\rangle + \eta|۷\rangle$$

گیت توفولی TOFFOLI (نقیض دوکنترلی CCNOT)

مثال گیت نقیض بدون بیت کنترلی، گیت نقیض کنترل‌شده دارای تک بیت کنترلی، گیت توفولی دارای دو بیت کنترلی

گیت با سه بیت کنترلی از سه گیت توفولی:



گیت توفولی TOFFOLI (نقیض دوکنترلی CCNOT)

دلیل اهمیت گیت‌های توفولی؟

- جامع بودن

امکان ایجاد هر گیت منطقی با گیت‌های توفولی

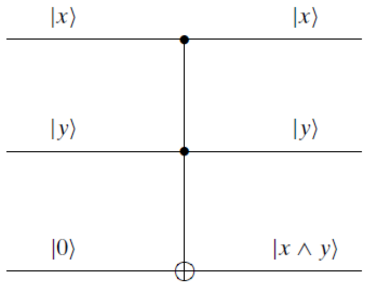
خاصه، امکان ایجاد رایانه معکوس‌پذیر صرفا با کمک گیت‌های توفولی

چنین رایانه‌ای در نظر بدون مصرف انرژی و عدم خروجی گرمایی

گیت توفولی TOFFOLI (نقیض دوکنترلی CCNOT)

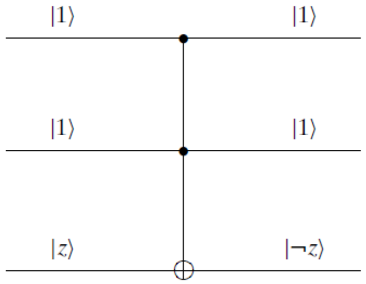
جامعیت توفولی

- گیت وصل: تنظیم بیت پایین ورودی $|z\rangle$ به $|0\rangle$ در نتیجه بیت خروجی پایینی برابر با $|(x \wedge y)\rangle$



گیت توفولی TOFFOLI (نقیض دوکنترلی CCNOT)

- گیت نقیض با مقداردهی دو بیت بالایی ورودی به $|1\rangle$ در نتیجه بیت خروجی پایینی
- $|(1 \wedge 1) \oplus z\rangle = |1 \oplus z\rangle = |\neg z\rangle$

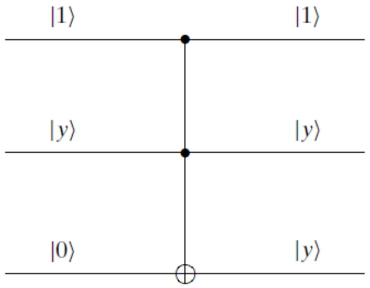


گیت توفولی TOFFOLI (نقیض دوکنترلی CCNOT)

جهت ایجاد تمامی گیت‌ها نیاز به روشی جهت تولید مقادیر

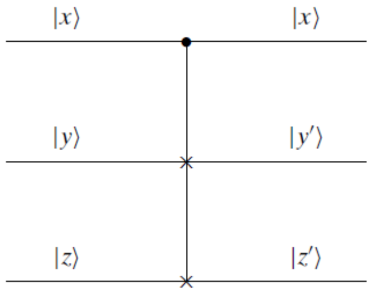
گیت نیاز به ورودی مقدار و خروجی دو مقدار مشابه

امکان آن با تنظیم x به 1 و z به صفر منجر به خروجی $|۱,y,y\rangle$



تمرین- ایجاد گیت نقیض وصل با گیت توفولی. ایجاد گیت یا با دو گیت توفولی

گیت فردکین



دارای سه ورودی و سه خروجی

بیت بالایی $|x\rangle$ ورودی کنترل با خروجی همیشه $|x\rangle$

اگر $|x\rangle = 0$، آنگاه $|y'\rangle = |y\rangle$ و $|z'\rangle = |z\rangle$

- به سخن دیگر، مقادیر بی‌تغییر

اگر $|x\rangle = \text{۱}$، آنگاه $|y'\rangle = |z\rangle$ و $|z'\rangle = |y\rangle$

سخن کوتاه

- $0,y,z\rangle \to |0,y,z\rangle$
- $|\text{۱},y,z\rangle \to |\text{۱},z,y\rangle$

گیت فردکین معکوس خودش

گیت فردکین

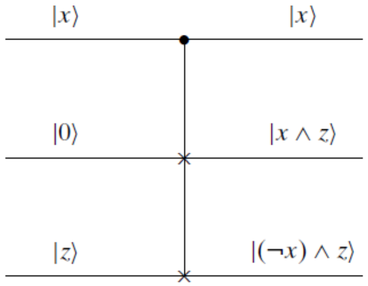
ماتریس متناظر

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \end{array} \\
\begin{array}{c} 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

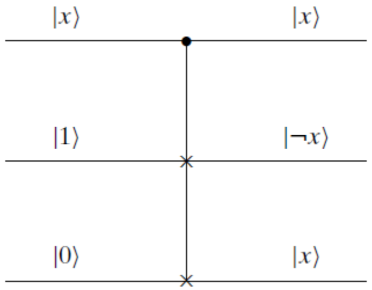
گیت فردکین

جامعیت گیت فردکین

- با $|y\rangle = |0\rangle$ داریم گیت وصل:



- با $|y\rangle = |1\rangle$ و $|z\rangle = |0\rangle$ داریم گیت نقیض:



گیت فردکین

سخن کوتاه هر دو گیت توفولی و فردکین

گیت‌هایی جامع

هر یک معکوس خود

ماتریس‌های یگانی

گیت والش-هدامرد.

گیت‌های قبلی مابه‌ازای کلاسیک

گیت والش-هدامرد

مشهور به هدامرد

نداشتن معادل کلاسیکی

تک‌ورود تک خروجی

- امکان چندورودی و چندخروجی با ضرب تنسوری

$$H|0\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|0\rangle + |۱\rangle) = |+\rangle$$
$$H|۱\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|0\rangle - |۱\rangle) = |-\rangle$$

اعمال به بردارهای صفر و یک چرخش آنها به برهم‌نهی بردارهای پایه

- بی‌معنی بودن $\frac{۱}{\sqrt{۲}}(0 + 1)$ در منطق کلاسیک

گیت والش-هدامرد

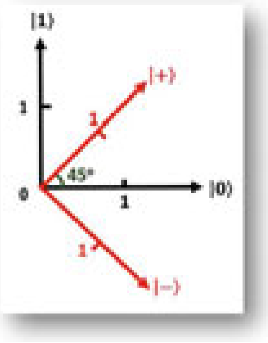
$|0\rangle$ و $|۱\rangle$ ویژه‌بردارهای σ_z

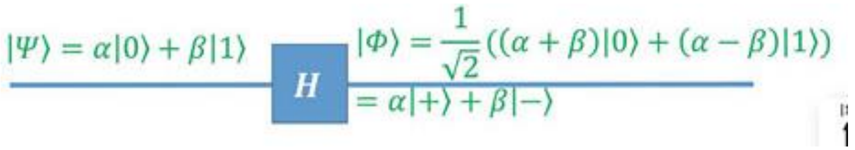
- $|+\rangle$ و $|-\rangle$ ویژه‌بردارهای σ_x

$$H|0\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|0\rangle + |۱\rangle) = |+\rangle$$
$$H|۱\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|0\rangle - |۱\rangle) = |-\rangle$$

اعمال به بردارهای صفر و یک چرخش آنها به برهم‌نهی بردارهای پایه

- بی‌معنی بودن $\frac{۱}{\sqrt{۲}}(0+1)$ در منطق کلاسیک





گیت والش-هدامرد

$$\boldsymbol{H}\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$\boldsymbol{H}\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

گیت والش-هدامرد

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}\,|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}\\
&= \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle
\end{aligned}
$$

گیت والش-هدامرد

خواص

- $H = H^{-1}$
- $HH^{-1} = I$
- $HH = I$

گیت والش-هدامرد

استفاده از تک ماتریس هدامرد جهت قرار دادن تک کیوبیت به برهم‌نهی صفر و یک

جهت برهم‌نهی **n**کیوبیت

- استفاده از ضرب تنسوری **n** ماتریس هدامرد
- نحوهٔ ضرب تنسوری
- بررسی H و $H \otimes H$ یا $H^{\otimes ۲}$ و $H \otimes H \otimes H$ یا $H^{\otimes ۳}$
- یافتن الگو

گیت والش-هدامرد

خواص

- هدامرد چندکیوبیتی

$$H^{\otimes n} = H \otimes H \otimes \cdots \otimes H$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H^{\otimes 2} = H \otimes H$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ 1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

گیت والش-هدامرد

تعریف ماتریس هدامرد:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c|cc} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0} & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & -1 \end{array}.$$

یا $H[i,j] = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(-۱)^{i \wedge j}$ و i و j متناظر سطر و ستون دودویی و $\wedge$ معادل وصل منطقی

پس نمایش ماتریس هدامرد به صورت:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c|cc} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0} & (-1)^{0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1} \\ \mathbf{1} & (-1)^{1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1} \end{array}.$$

در نتیجه، برای ضرب تنسوری دو ماتریس هدامرد داریم:

$$H^{\otimes 2} = H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c|cc} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0} & (-1)^{0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1} \\ \mathbf{1} & (-1)^{1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1} \end{array} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c|cc} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0} & (-1)^{0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1} \\ \mathbf{1} & (-1)^{1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1} \end{array}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{00} & \mathbf{01} & \mathbf{10} & \mathbf{11} \\ \hline \mathbf{00} & (-1)^{0\wedge 0} * (-1)^{0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 0} * (-1)^{0\wedge 1} & (-1)^{0\wedge 1} * (-1)^{0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1} * (-1)^{0\wedge 1} \\ \mathbf{01} & (-1)^{0\wedge 0} * (-1)^{1\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 0} * (-1)^{1\wedge 1} & (-1)^{0\wedge 1} * (-1)^{1\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1} * (-1)^{1\wedge 1} \\ \mathbf{10} & (-1)^{1\wedge 0} * (-1)^{0\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 0} * (-1)^{0\wedge 1} & (-1)^{1\wedge 1} * (-1)^{0\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1} * (-1)^{0\wedge 1} \\ \mathbf{11} & (-1)^{1\wedge 0} * (-1)^{1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 0} * (-1)^{1\wedge 1} & (-1)^{1\wedge 1} * (-1)^{1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1} * (-1)^{1\wedge 1} \end{array}$$

گیت والش-هدامرد

عدم علاقمندی به $(-۱)^{x+y}$ با ضرب $(-۱)^{x}$ در $(-۱)^{y}$

- بلکه علاقمند به بیت نقلی x و y در نتیجه عدم جمع دو مقدار اخیر و در عوض محاسبه یاء انحصاری آنها
- در نتیجه داریم:

$$H^{\otimes 2} = \frac{1}{2}\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathbf{00} & \mathbf{01} & \mathbf{10} & \mathbf{11} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{00} \\ \mathbf{01} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{11} \end{array} & \begin{bmatrix} (-1)^{0\wedge 0\oplus 0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 0\oplus 0\wedge 1} & (-1)^{0\wedge 1\oplus 0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1\oplus 0\wedge 1} \\ (-1)^{0\wedge 0\oplus 1\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 0\oplus 1\wedge 1} & (-1)^{0\wedge 1\oplus 1\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1\oplus 1\wedge 1} \\ (-1)^{1\wedge 0\oplus 0\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 0\oplus 0\wedge 1} & (-1)^{1\wedge 1\oplus 0\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1\oplus 0\wedge 1} \\ (-1)^{1\wedge 0\oplus 1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 0\oplus 1\wedge 1} & (-1)^{1\wedge 1\oplus 1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1\oplus 1\wedge 1} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathbf{00} & \mathbf{01} & \mathbf{10} & \mathbf{11} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{00} \\ \mathbf{01} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{11} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

- تمرین با استقرا اثبات کنید که ضرب $H^{\otimes n}$ برابر با $۲^{-\frac{n}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲^n}}$ است.
- در نتیجه تحویل مسئله به تعیین زوج یا فردی توان -۱

گیت والش-هدامرد

امکان استفاده از عملیات زیر

$$\langle , \rangle_2 : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

با داشتن دو رشته دودوئی n-بیتی $\boldsymbol{x} = x_{n-1} \cdots x_2 x_1 x_0$ و $\boldsymbol{y} = y_{n-1} \cdots y_2 y_1 y_0$ داریم:

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle_2 = \langle y_{n-1} \cdots y_2 y_1 y_0, x_{n-1} \cdots x_2 x_1 x_0 \rangle_2$$
$$= (x_{n-1} \wedge y_{n-1}) \oplus \cdots \oplus (x_2 \wedge y_2 \oplus)(x_1 \wedge y_1) \oplus (x_0 \wedge y_0)$$

محاسبهٔ نقلی تعداد دفعاتی که هر دو بیت متناظر یک بوده‌اند

نوعی از ضرب داخلی روی میدانی با دو عضو $\{0,1\}$

- نمایش با $\mathbb{Z}_2$ یا $\mathbb{F}_2$

عملیات یاء انحصاری بیت‌به‌بیت

گیت والش-هدامرد

تابع $\langle , \rangle : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ برآورده ساز خواص زیر

$$\langle \mathbf{x} \oplus \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \oplus \langle \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle,$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \oplus \mathbf{y}' \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \oplus \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle.$$

$$\langle 0 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle 0^n, \mathbf{y} \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{x}, 0 \cdot \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, 0^n \rangle = 0.$$

گیت والش-هدامرد

نمادگذاری ممکن‌سازی نوشتن $H^{\otimes ۳}$

$$
\frac{1}{2\sqrt{2}}
\begin{array}{c}
\\ \mathbf{000} \\ \mathbf{001} \\ \mathbf{010} \\ \mathbf{011} \\ \mathbf{100} \\ \mathbf{101} \\ \mathbf{110} \\ \mathbf{111}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{000} & \mathbf{001} & \mathbf{010} & \mathbf{011} & \mathbf{100} & \mathbf{101} & \mathbf{110} & \mathbf{111}
\end{array}
\\
\begin{bmatrix}
(-1)^{\langle 000,000\rangle} & (-1)^{\langle 000,001\rangle} & (-1)^{\langle 000,010\rangle} & (-1)^{\langle 000,011\rangle} & (-1)^{\langle 000,100\rangle} & (-1)^{\langle 000,101\rangle} & (-1)^{\langle 000,110\rangle} & (-1)^{\langle 000,111\rangle} \\
(-1)^{\langle 001,000\rangle} & (-1)^{\langle 001,001\rangle} & (-1)^{\langle 001,010\rangle} & (-1)^{\langle 001,011\rangle} & (-1)^{\langle 001,100\rangle} & (-1)^{\langle 001,101\rangle} & (-1)^{\langle 001,110\rangle} & (-1)^{\langle 001,111\rangle} \\
(-1)^{\langle 010,000\rangle} & (-1)^{\langle 010,001\rangle} & (-1)^{\langle 010,010\rangle} & (-1)^{\langle 010,011\rangle} & (-1)^{\langle 010,100\rangle} & (-1)^{\langle 010,101\rangle} & (-1)^{\langle 010,110\rangle} & (-1)^{\langle 010,111\rangle} \\
(-1)^{\langle 011,000\rangle} & (-1)^{\langle 011,001\rangle} & (-1)^{\langle 011,010\rangle} & (-1)^{\langle 011,011\rangle} & (-1)^{\langle 011,100\rangle} & (-1)^{\langle 011,101\rangle} & (-1)^{\langle 011,110\rangle} & (-1)^{\langle 011,111\rangle} \\
(-1)^{\langle 100,000\rangle} & (-1)^{\langle 100,001\rangle} & (-1)^{\langle 100,010\rangle} & (-1)^{\langle 100,011\rangle} & (-1)^{\langle 100,100\rangle} & (-1)^{\langle 100,101\rangle} & (-1)^{\langle 100,110\rangle} & (-1)^{\langle 100,111\rangle} \\
(-1)^{\langle 101,000\rangle} & (-1)^{\langle 101,001\rangle} & (-1)^{\langle 101,010\rangle} & (-1)^{\langle 101,011\rangle} & (-1)^{\langle 101,100\rangle} & (-1)^{\langle 101,101\rangle} & (-1)^{\langle 101,110\rangle} & (-1)^{\langle 101,111\rangle} \\
(-1)^{\langle 110,000\rangle} & (-1)^{\langle 110,001\rangle} & (-1)^{\langle 110,010\rangle} & (-1)^{\langle 110,011\rangle} & (-1)^{\langle 110,100\rangle} & (-1)^{\langle 110,101\rangle} & (-1)^{\langle 110,110\rangle} & (-1)^{\langle 110,111\rangle} \\
(-1)^{\langle 111,000\rangle} & (-1)^{\langle 111,001\rangle} & (-1)^{\langle 111,010\rangle} & (-1)^{\langle 111,011\rangle} & (-1)^{\langle 111,100\rangle} & (-1)^{\langle 111,101\rangle} & (-1)^{\langle 111,110\rangle} & (-1)^{\langle 111,111\rangle}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
= \frac{1}{2\sqrt{2}}
\begin{array}{c}
\\ \mathbf{000} \\ \mathbf{001} \\ \mathbf{010} \\ \mathbf{011} \\ \mathbf{100} \\ \mathbf{101} \\ \mathbf{110} \\ \mathbf{111}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{000} & \mathbf{001} & \mathbf{010} & \mathbf{011} & \mathbf{100} & \mathbf{101} & \mathbf{110} & \mathbf{111}
\end{array}
\\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

گیت والش-هدامرد

در نتیجه در حالت کلی

$$H^{\otimes n}[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \frac{1}{\sqrt{2^n}}(-1)^{\langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle},$$

- به طوری‌که $\boldsymbol{i}$ و $\mathbf{j}$ به ترتیب مقادیر دودوئی سطر و ستون است.

گیت والش-هدامرد

$$H^{\otimes 2}|00\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

$$\begin{aligned}
H^{\otimes 2}|\Psi\rangle &= H \otimes H(\alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle)\\
&= H \otimes H(\alpha|0\rangle \otimes |0\rangle + \beta|0\rangle \otimes |1\rangle + \gamma|1\rangle \otimes |0\rangle + \delta|1\rangle \otimes |1\rangle)\\
&= \alpha(H|0\rangle) \otimes (H|0\rangle) + \beta(H|0\rangle) \otimes (H|1\rangle) + \gamma(H|1\rangle) \otimes (H|0\rangle)\\
&\quad + \delta(H|1\rangle) \otimes (H|1\rangle)\\
&= \alpha|+\rangle \otimes |+\rangle + \beta|+\rangle \otimes |-\rangle + \gamma|-\rangle \otimes |+\rangle + \delta|-\rangle \otimes |-\rangle)\\
&= \alpha|++\rangle + \beta|+-\rangle + \gamma|-+\rangle + \delta|--\rangle \qquad (17.1
\end{aligned}$$

گیت والش-هدامرد

ضرب حالتی با ماتریس مذکور؟

- یک بودن تمامی مدخل‌های چپ‌ترین ستون ماتریس $H^{\otimes n}$
- در صورت ضرب $H^{\otimes n}$ در حالت صفر

$$|\mathbf{0}\rangle = |00\ldots0\rangle = \begin{array}{c} 00000000 \\ 00000001 \\ 00000010 \\ \vdots \\ 11111110 \\ 11111111 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

گیت والش-هدامرد

برابر با سمت چپ‌ترین ستون ماتریس مزبور

$$H^{\otimes n}|\mathbf{0}\rangle = H^{\otimes n}[-,\mathbf{0}] = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \begin{array}{c} 00000000 \\ 00000001 \\ 00000010 \\ \vdots \\ 11111110 \\ 11111111 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{\mathbf{x}\in\{0,1\}^n} |\mathbf{x}\rangle.$$

حالت پایهٔ $|y\rangle$ با نمایش ستونی ۱ در موقعیت $\boldsymbol{y}$ و صفر در بقیه مدخل‌ها،برابر با استخراج ستون $\boldsymbol{y}$-ام $H^{\otimes n}$

$$H^{\otimes n}|\mathbf{y}\rangle = H^{\otimes n}[-,\mathbf{y}] = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{\mathbf{x}\in\{0,1\}^n} (-1)^{\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}|\mathbf{x}\rangle.$$

گیت والش-هدامرد

خواص گیت هدامرد چندکیوبیتی

اعمال $H^{\otimes \mathrm{n}}$ به $|0\rangle_n$

- ایجاد برداری برهم‌نهی از تمامی بردارهای پایه در فضای ۲^n بعدی (فضای $\mathbb{C}^{2^n}$)

$$|0\rangle_n = |00\cdots0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^{\otimes n}|0\rangle_n &= \boldsymbol{H}^{\otimes n}|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle \\ &= (\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{H})|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle \\ &= (\boldsymbol{H}|0\rangle) \otimes (\boldsymbol{H}|0\rangle) \otimes \cdots \otimes (\boldsymbol{H}|0\rangle) \end{aligned}$$

گیت والش-هدامرد

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^{\otimes n}|0\rangle_n &= (\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)) \otimes (\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)) \otimes \cdots \otimes (\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)) \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}(|0\rangle+|1\rangle) \otimes (|0\rangle+|1\rangle) \otimes \cdots \otimes (|0\rangle+|1\rangle) \otimes (|0\rangle+|1\rangle)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^{\otimes n}|0\rangle_n &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}(|00\cdots00\rangle+|00\cdots01\rangle+|00\cdots10\rangle+|00\cdots11\rangle+\cdots+ \\
&\quad |11\cdots10\rangle+|11\cdots11\rangle \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}(|0\rangle+|1\rangle+|2\rangle+|3\rangle+\cdots+\left|2^n-2\right\rangle+\left|2^n-1\right\rangle) \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle \qquad (17.
\end{aligned}
$$

گیت والش-هدامرد

$$|y\rangle = |y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_1y_0\rangle$$

$$\boldsymbol{H}\,|y_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^{y_i}\,|1\rangle)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^{\otimes n}\,|y\rangle &= \boldsymbol{H}^{\otimes n}\,|y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_0\rangle \\
&= (\boldsymbol{H}\,|y_{n-1}\rangle) \otimes (\boldsymbol{H}\,|y_{n-2}\rangle) \otimes \cdots \otimes (\boldsymbol{H}\,|y_0\rangle) \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^{y_{n-1}}\,|1\rangle)) \otimes (\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^{y_{n-2}}\,|1\rangle)) \otimes \cdots \\
&\quad \otimes(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^{y_0}\,|1\rangle)) \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}(|0\rangle + (-1)^{y_{n-1}}\,|1\rangle) \otimes (|0\rangle + (-1)^{y_{n-2}}\,|1\rangle) \\
&\quad \otimes \cdots \otimes (|0\rangle + (-1)^{y_0}\,|1\rangle)
\end{aligned}$$

گیت والش-هدامرد

$$x \cdot y = (x_{n-1} AND y_{n-1}) \oplus (x_{n-2} AND y_{n-2}) \oplus \cdots \oplus (x_0 AND y_0) \quad (17.20)$$

$$\boldsymbol{H}^{\otimes n} |y\rangle = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot y} |x\rangle$$

گیت والش-هدامرد

مثال

$$H^{\otimes 2}|3\rangle = \frac{1}{2^{\frac{2}{2}}}\sum_{x=0}^{2^2-1}(-1)^{x\cdot 3}|x\rangle = \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{3}(-1)^{x\cdot 3}|x\rangle$$

$$= \frac{1}{2}((-1)^{0\cdot 3}|0\rangle + (-1)^{1\cdot 3}|1\rangle + (-1)^{2\cdot 3}|2\rangle + (-1)^{3\cdot 3}|3\rangle)$$

$$0\cdot 3 = (0AND1)\oplus(0AND1) = 0\oplus 0 = 0$$

$$1\cdot 3 = (0AND1)\oplus(1AND1) = 0\oplus 1 = 1$$

$$2\cdot 3 = (1AND1)\oplus(0AND1) = 1\oplus 0 = 1$$

$$3\cdot 3 = (1AND1)\oplus(1AND1) = 1\oplus 1 = 0$$

$$H^{\otimes 2}|3\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle - |2\rangle + |3\rangle)$$

گیت والش-هدامرد

- نحوه دیگر مثال قبلی

$$
\begin{aligned}
H^{\otimes 2}|3\rangle &= H^{\otimes 2}|11\rangle \\
&= (H|1\rangle) \otimes (H|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2^{\frac{2}{2}}}(|0\rangle + (-1)^1|1\rangle) \otimes (|0\rangle + (-1)^1|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(1|0\rangle + (-1)|1\rangle) \otimes (1|0\rangle + (-1)|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(1 \times 1|0\rangle|0\rangle + 1 \times (-1)|0\rangle|1\rangle + (-1) \times 1|1\rangle|0\rangle \\
&\quad +(-1) \times (-1)|1\rangle|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)
\end{aligned}
$$

مثالی از مداری کوانتومی

- حالت‌های پایه دو کیوبیتی

$$|00\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \quad |01\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad |10\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad |11\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

- حالت‌های بل
- درهم‌تنیده

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}; \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}; \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}_{XOR}\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

مثالی از مداری کوانتومی

$$= \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\ 1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & -1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 1&0&-1&0\\ 0&1&0&-1 \end{pmatrix}$$

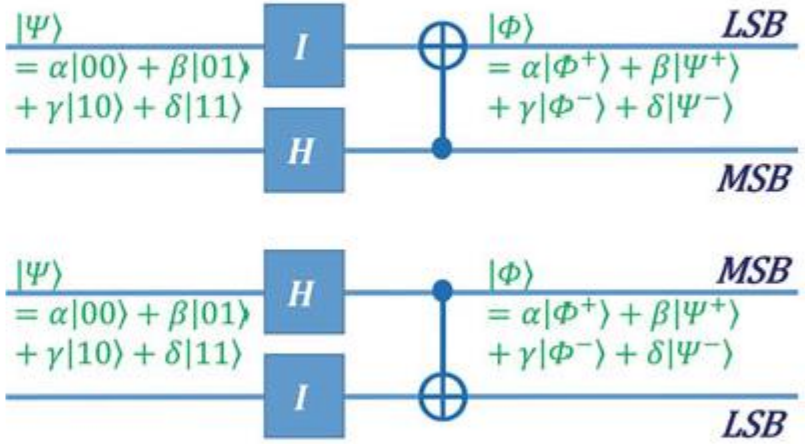
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&1&0&-1\\ 1&0&-1&0 \end{pmatrix}$$

مثالی از مداری کوانتومی

$$U_{XOR}(H \otimes I)\,|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\Psi^+\rangle$$

$$|\boldsymbol{\Phi}\rangle = \boldsymbol{U_{XOR}(H \otimes I)}|\boldsymbol{\Psi}\rangle$$



مثالی از مداری کوانتومی

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|0۱\rangle + \gamma|۱0\rangle + \delta|۱۱\rangle$$

$$U_{xor}(H \otimes I)|\psi\rangle = U_{xor}(H \otimes I)(\alpha|00\rangle + \beta|0۱\rangle + \gamma|۱0\rangle + \delta|۱۱\rangle\,)$$

$$= U_{xor}(H \otimes I)(\alpha|00\rangle + \beta|0۱\rangle + \gamma|۱0\rangle + \delta|۱۱\rangle\,)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \beta + \delta \\ \beta - \delta \\ \alpha - \gamma \end{pmatrix} \qquad (18.5)$$

$$U_{xor}(H \otimes I)(\alpha|00\rangle + \beta|0۱\rangle + \gamma|۱0\rangle + \delta|۱۱\rangle\,) = \alpha|\phi^+\rangle + \beta|\psi^+\rangle + \gamma|\phi^-\rangle + \delta|\psi^-\rangle$$

مثالی از مداری کوانتومی

$$\alpha\left|\Phi^{+}\right\rangle+\beta\left|\Psi^{+}\right\rangle+\gamma\left|\Phi^{-}\right\rangle+\delta\left|\Psi^{-}\right\rangle$$

$$=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+\frac{\delta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\alpha+\gamma\\\beta+\delta\\\beta-\delta\\\alpha-\gamma\end{pmatrix}$$

گیت‌های کوانتومی

چند گیت دیگر کوانتومی

ماتریس‌های پائولی

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حضور حداکثری در مکانیک کوانتومی و رایانش کوانتومی

ماتریس X ماتریس نقیض

دیگر ماتریس‌های مهم

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{۴}} \end{bmatrix}$$

گیت‌های کوانتومی

ماتریس‌های پائولی

$$X=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}, Z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

حضور حداکثری در مکانیک کوانتومی و رایانش کوانتومی

ماتریس X ماتریس نقیض

دیگر ماتریس‌های مهم

$$S=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}, T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{\frac{i\pi}{۴}}\end{bmatrix}$$

- یگانی بودن ماتریس‌ها بالا
- تمرین- کنش هر نمایش روی کیوبیت دلخواه $[c_0, c_۱]^T$
- درای روابط بسیار نزدیک به هم
  - $X^2 = Y^2 = Z^2 = I$
  - $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Z)$
  - $X = HZH$
  - $Z = HXH$
  - $-1Y = HYH$
  - $S = T^۲$
  - $-1Y = XYX$
    - تمرین اثبات کنید.

گیت‌های کوانتومی

وجود دیگر گیت‌های کوانتومی

گیت تک کیوبیتی با نام ریشه دوم نقیض

نمایش با $\sqrt{\neg}$

$$\sqrt{\neg} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

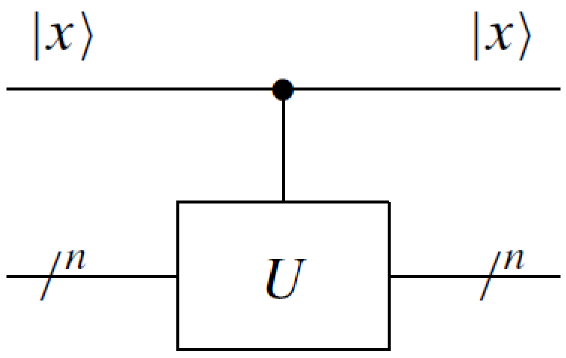
معکوس خود نیست یا $\sqrt{\neg} \neq \sqrt{\neg}^{\dagger}$

$$\sqrt{\neg} * \sqrt{\neg} = (\sqrt{\neg})^{۲} = \begin{bmatrix} 0 & -۱ \\ ۱ & 0 \end{bmatrix}$$

شبیه به گیت نقیض

- $\sqrt{\neg} * |0\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \end{bmatrix} = |۱\rangle$
- $\sqrt{\neg} * |۱\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = -۱|0\rangle$
- هر دو ی $-۱|0\rangle$ و $|0\rangle$ نمایش یک حالت
- در نتیجه مشابه گیت نقیض

گیت‌های کوانتومی



وجود دیگر گیت‌های کوانتومی

از ویژگی‌های بنیادی دانش و فن رایانه

انجام عملیات تحت شرایط خاص

- اگر-آن‌گاه

در صورت برقرار شدن کیوبیتی

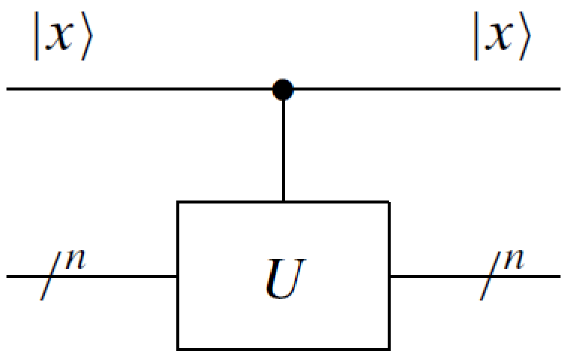
- اجرای عملیاتی دیگر

جهت هر عملیات یگانی n-کیوبیتی امکان ایجاد عملیات $n + ۱$-کیوبیتی با نام کنترل شده

- اجرا در صورتی که $|x\rangle$ برابر $|۱\rangle$ و اجرای ماتریس همانی در صورت برابری مقدار مذکور با $|0\rangle$

گیت‌های کوانتومی

مثال- فرض **U** ماتریس عملیاتی زیر باشد.



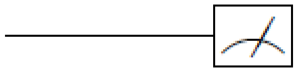
$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

آن‌گاه

$$^{C}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}$$

گیت‌های کوانتومی

گیت دیگر: عملگر اندازه‌گیری

- نه یگانی و نه لزوما معکوس‌پذیر
- اجرای عملیات در پایان رایانش و هنگام نیاز به اندازه‌گیری کیوبیت‌ها (و یافتن بیت‌ها)
- نمایش با 

جامعیت مدار

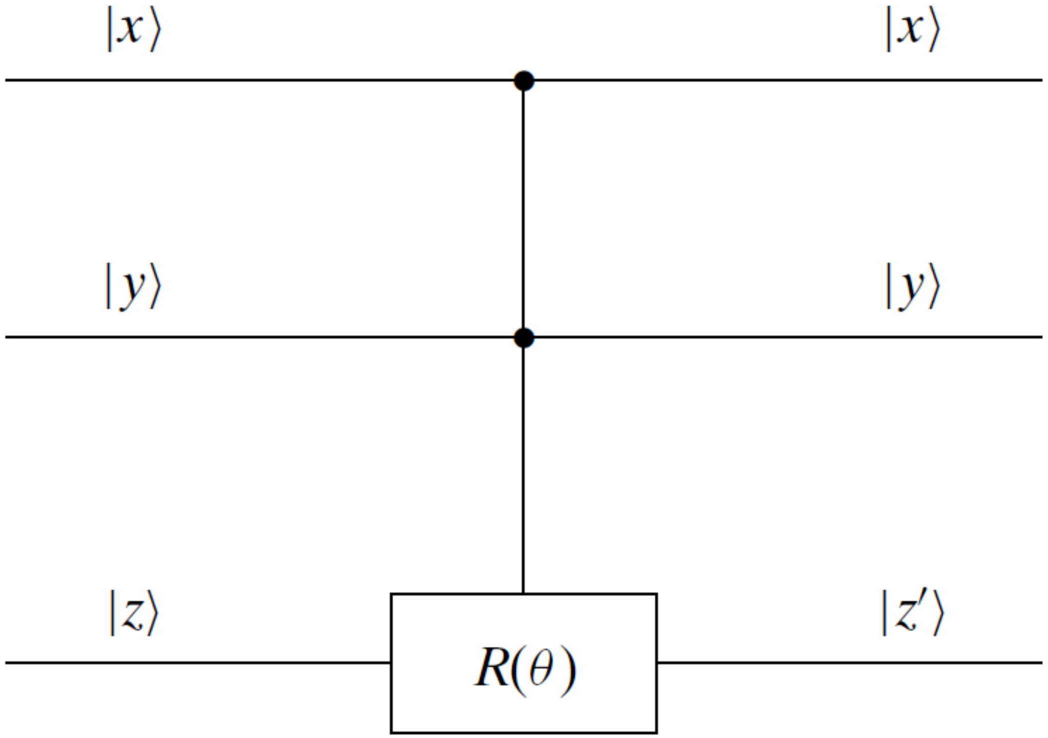
در مدارات منطقی

- وصل و نقیض
- NAND
- توفولی
- فردکین

گیت‌های جامع کوانتومی؟

- {هدامرد و نقیض کنترل‌شده و گیت شیفت فاز $R\left(\cos^{-۱}\frac{۳}{۵}\right)$}
- گیت دویچ

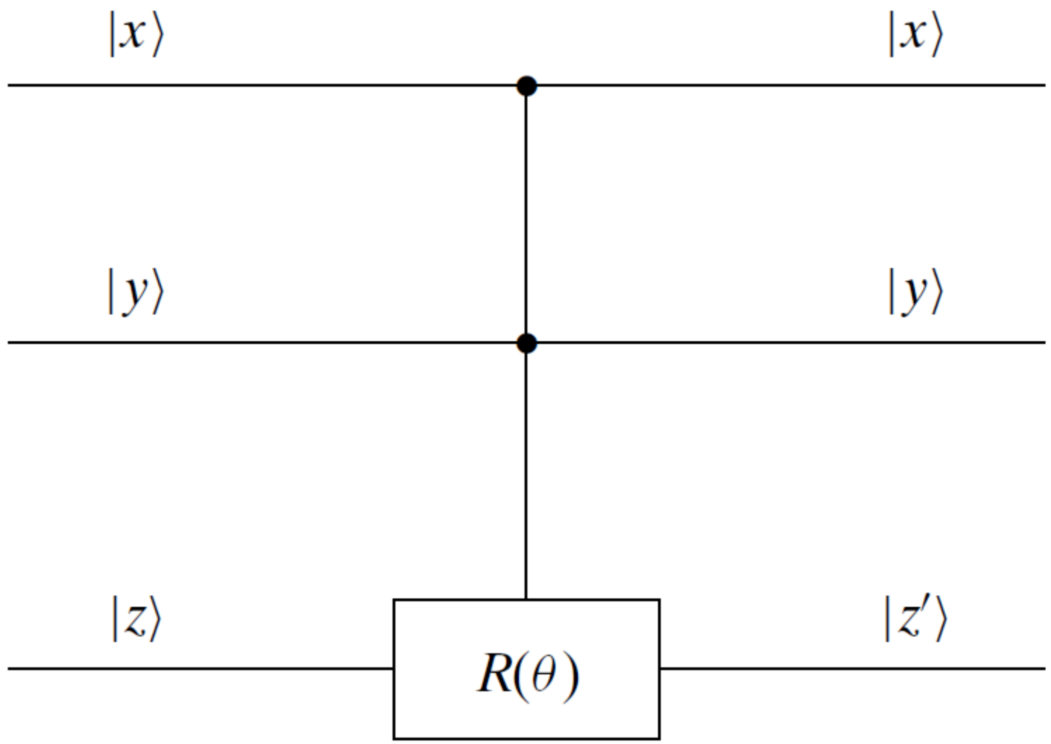
گیت دویچ



جامعیت مدار

گیت دویچ

- شبیه توفولی
- اگر هر دوی $|x\rangle$ و $|y\rangle$ برابر $|1\rangle$ اجرای $R(\theta)$ روی $|z\rangle$
  - وگرنه خروجی برابر ورودی



پارادوکس اپر

$$|\phi^+\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|00\rangle + |۱۱\rangle)$$

اندازه‌گیری در محل در پایه $|0\rangle/|۱\rangle$

- دریافت $|0\rangle$
- تبدیل پایه به $|00\rangle$

اندازه‌گیری در محل در پایه $|+\rangle/|-\rangle$

- $|0\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|+\rangle + |-\rangle)$
  - فرض رمبش به $|+\rangle$
- پس صد در صد الکترون در $|+\rangle$ و $|0\rangle$
  - پارادوکس؟!

پارادوکس اپر

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

- اندازه‌گیری همزمان صد در صدی در دو پایه
- ناسازگاری
  - به معنای اشتباه یا ناکاملی (متغیرهای پنهانی هنوز یافت نشده) کوانتوم
  - «نامساوی بل»
  - نشان می‌دهد بنظر مکانیک کوانتوم درست است

NO-CLONING THEOREMقضیه امتناع شبیه‌سازی

قضیه امتناع شبیه‌سازی

خاصیت مهم مکانیک کوانتوم

قضیه

- نمی‌توان تمامی حالات کوانتومی را رونوشت برداشت یا شبیه‌سازی کرد.
- تفاوت از مشی کلاسیک
- امکان کپی محتوای ثبات کلاسیکی یا حافظه به ثبات یا حافظۀ دیگر
- کپی عکس و
- اما ناممکنی در کوانتوم
- در ایام ماضی
- تحویل برگه کاغذی و فتوکپی مانند عدم اصل نیست.
- در ایام الکترونیکی، امکان کپی اطلاع و عدم کپی ماده
  - صرفا کپی اطلاع

قضیه امتناع شبیه‌سازی

یکسانی ذرات در سطح میکروسکوپی

- یکسانی الکترونی در بدن شما با الکترون در بدن هر کس دیگر
- هر دو الکترون
  - امکان تفاوت در حالت
- تفاوت کپی حالت الکترون با کپی اطلاع

فرض وجود دو الکترون Aو B دارای حالات آغازین $|\psi\rangle_A$ و $|0\rangle_B$

$|\psi\rangle_A$

- ترکیبی از بردارهای صفر و یک
- $|\psi\rangle_A = \alpha|0\rangle_A + \beta|۱\rangle_A$

قضیه امتناع شبیه‌سازی

حالت کل سیستم برابر ضرب تنسوری نها

- $|\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_A = |\psi\rangle_A |0\rangle_A$

در صورت شبیه‌سازی از الکترون A به الکترون B و

- تغییر سیستم به حالت $|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$
- نیاز به خواندن قبل کپی در مشی کلاسیک
- ولی عدم امکان خواندن در مشی کلاسیک
  - چرا؟ رمبش به صفر یا یک
- در نتیجه شبیه‌سازی از نوع عملگر و نه اندازه‌گیری
- نوشتن به صورت عملگر (ماتریس) همانند گیت‌های کوانتومی
  - یگانی
  - صرفا چرخش بردار
  - پس عملگری در فضای چهاربعدی مختلط
  - $L(|\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_A) = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$

قضیه امتناع شبیه‌سازی

$$L(|\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_B) = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B = (\alpha|0\rangle_A + \beta|۱\rangle_A) \otimes (\alpha|0\rangle_B + \beta|۱\rangle_B)$$
$$= \alpha^{۲}|00\rangle + \alpha\beta|0۱\rangle + \beta\alpha|۱0\rangle + \beta^{۲}|۱۱\rangle \Leftarrow (*)$$

- از طرف دیگر

$$|\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_B = (\alpha|0\rangle_A + \beta|۱\rangle_A) \otimes (|0\rangle_B) = \alpha|00\rangle + \beta|۱0\rangle$$

حال

$$L(\alpha|00\rangle + \beta|۱0\rangle) = \alpha|00\rangle + \beta|۱1\rangle = \alpha|00\rangle + 0|0۱\rangle + 0|۱0\rangle + \beta|۱۱\rangle \Leftarrow (**)$$

- $(*)$ و $(**)$ صرفا در صورتی که $\alpha = 0$ یا $\beta = 0$
- نتیجه: امکان شبیه سازی حالت‌های پایه و غیرممکنی شبیه‌سازی دیگر حالات برهم‌نهی

قضیه امتناع شبیه‌سازی

کاربردها

- عدم امکان شنود پیام بدون از بین بردن اطلاع اصلی
  - امکان استفاده ازا آ» جهت جلوگیری از شنود در ارتباط کوانتومی
- جلوگیری از طراحی الگوریتم که منجر هب اراسل اطاع سریعتر از سرعت نور

کره بلوخ

یادآوری: نمایش عدد هندسی عدد مختلط

- روی دایره با شعاع یک با زاویهٔ ϕ

همچنین امکان نمایش هندسی حالات تک کیوبیتی

- $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_۱|۱\rangle$
- به طوری که $|c_0|^۲ + |c_۱|^۲ = 1$

یا $|\psi\rangle = r_0 e^{i\phi_0}|0\rangle + r_۱ e^{i\phi_۱}|۱\rangle$

- دارای چهار پارمتر r_0 و $r_۱$ و ϕ_0 و $\phi_۱$

با ضرب پارامتر $e^{-i\phi_0}$

$$e^{-i\phi_0}|\psi\rangle = e^{-i\phi_0}(r_0 e^{i\phi_0}|0\rangle + r_۱ e^{i\phi_۱}|۱\rangle) = r_0|0\rangle + r_۱ e^{i(\phi_۱ - \phi_0)}|۱\rangle$$

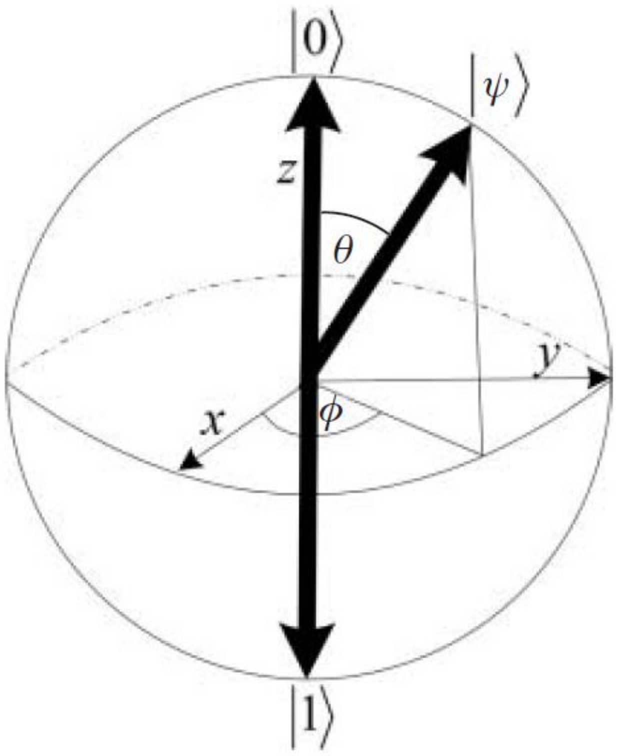
پس کاهیدن به سه مقدار حقیقی پارمتر r_0 و $r_۱$ و $\phi = \phi_۱ - \phi_0$

$$|c_0|^۲ + |c_۱|^۲ = 1 = \left|r_0 e^{i\phi_0}\right|^۲ + \left|r_0 e^{i\phi_۱}\right|^۲ = r_0^۲ + r_۱^۲ = ۱$$

امکان تغییر نام

- $r_0 = \cos\theta, r_۱ = \sin\theta$

کره بلوخ



پس داریم

$$|\psi\rangle = \cos\theta\,|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta\,|١\rangle$$

- $0 \le \phi \le 2\pi$
- $0 \le \theta \le \frac{\pi}{٢}$
- صرفا دو پارامتر
- پس امکان نمایش در کره سه بعدی واحد

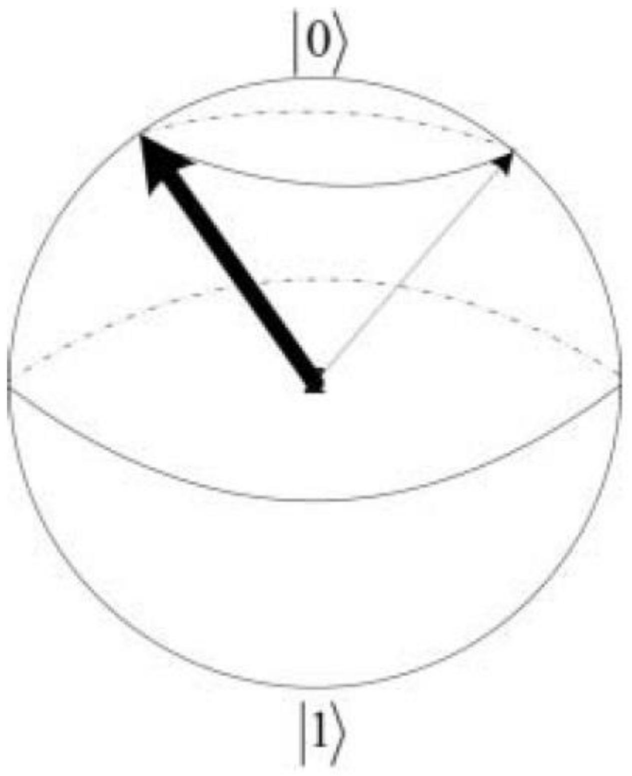
نمایش با کره بلوخ

- نمایش هر کیوبیت با زاویه طول ϕ و عرض جرافیایی θ
- با اندازه‌گیری کیوبیت رمبش به قطب شمال یا جنوب

کره بلوخ

چرخش حول محور z

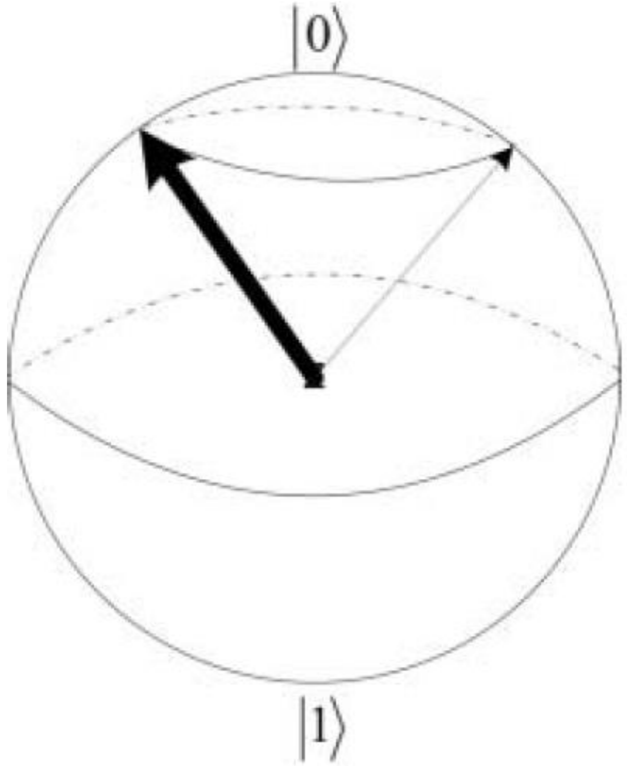
- تغییر طول جغرافیایی
- عدم تاثیر بر احتمال رمبش
- ملقب به تغییر فاز
- متناظر با تغییر فاز $e^{i\phi}$



کره بلوخ

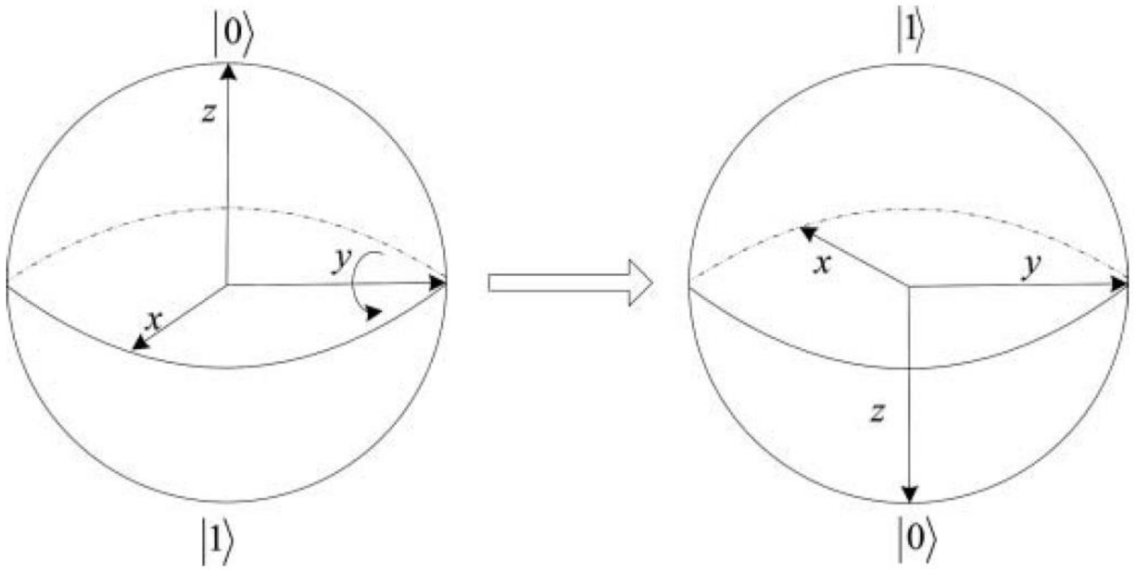
امکان نمایش هر ماتریس ۲ × ۲ به عنوان دستکاری کره

- نگاشت کیوبیت به کیوبیت
- معادل چرخش و وارون کردن کره بلوخ



کره بلوخ

- ماتریس‌های پائولی X، Y، Z چرخاندن ۱۸۰ درجه‌ای کرهٔ بلوخ حول محورهای x و y و z
  - ماتریس X
    - گیت نقض
    - جابجایی همه چیز بالای استوا به پائین آن
    - کارکرد مشابه ماتریس‌های پائولی



کره بلوخ

- گیت تغییر فاز
- $R(\theta) = \begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & e^{\theta} \end{bmatrix}$
- مثال- اعمال آن با $\cos\theta' \left|0\right\rangle + e^{i\phi} \sin\theta' \left|۱\right\rangle$:
- $\cos\theta' \left|0\right\rangle + e^{i\phi} \sin\theta' \left|۱\right\rangle = \begin{bmatrix} \cos\theta' \\ e^{i\phi} \sin\theta' \end{bmatrix}$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & e^{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta' \\ e^{i\phi} \sin\theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta' \\ e^{i\theta} e^{i\phi} \sin\theta' \end{bmatrix}$$

- پس عدم تاثیر روی حالت کیوبیت و صرفا تغییر فاز

کره بلوخ

- گاهی اوقات نیاز به چرخش‌های دلخواه حول محورها

$$R_x(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}X = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}Y = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix},$$

$$R_z(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}Z = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix}.$$

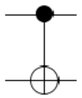
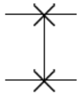
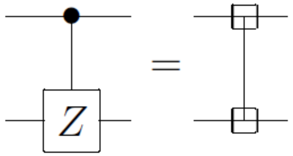
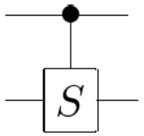
محدودیت‌های گیت‌های کوانتومی

لزوم معکوس‌پذیری عملیات‌ها

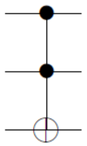
قضیهٔ امتناع نسخه *no-cloning theorem*:

- نسخه‌نویسی از حالت کوانتومی دقیق غیرممکن است
- غیرممکنی رونوشت‌گیری حالت کوانتومی دلخواه بدون تخریب مقدار اصلی
- کات و کپی ممکن ولی کپی ناممکن
- حرکت ممکن ولی کپی غیرممکن

Hadamard	$-\boxed{H}-$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
Pauli-X	$-\boxed{X}-$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Y	$-\boxed{Y}-$	$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Z	$-\boxed{Z}-$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Phase	$-\boxed{S}-$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$\pi/8$	$-\boxed{T}-$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$

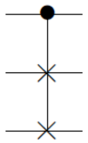
controlled-NOT		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
swap		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
controlled-Z		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
controlled-phase		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}$

Toffoli



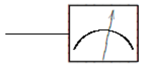
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fredkin (controlled-swap)

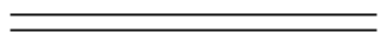
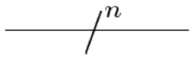


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

measurement



Projection onto $|0\rangle$ and $|1\rangle$

qubit		wire carrying a single qubit (time goes left to right)
classical bit		wire carrying a single classical bit
n qubits		wire carrying n qubits

منابع

مانوچچی

ؤانگ

نیلسن

شنکار